BIBLIOTHEQUE DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCE.

S.X. d. 11.

PHIL. DE LA HIRE
DE CYCLOIDE.

LEMMA.

ESTO ſemicyclois BPV deſcripta à puncto V volutione ſemicirculi ACV ſupra rectam AB, qui Circulus eſt genitor, recta BA baſis, VA Axis, & punctum V Vertex. *Fig. 1.*

Ducatur in circulo chorda quædam CV & CP parallela BA & PT parallela] CV, dico rectam PT contingere Cycloidem in puncto P. Cujus propoſitionis demonſtrationem quòd multi doctiſſimi geometræ per ſolam Cycloidis deſcriptionem demonſtraverint, illam idcirco prætermittam.

PROPOSITIO Ia

Expoſitâ ſemicycloide ut ſupra. ducta contingente TV in vertice V & parallela baſi. agatur recta PT contingens Cycloidem in aliquo puncto P, & PC parallela baſi, & connectatur CV: Dico triangulum mixtilineum PTV eſſe æquale Circuli ſegmento correſpondenti VC. *Fig. 1.*

Si hæ figuræ non ſint æquales erit alterutra major. Eſto ſi fieri poſſit trilineum mixtum PTV majus ſegmento circuli CV ſpatio X.

In triangulo PTV inſcribi poſſunt infinita triangula rectilinea ut DEF, GHI, &c. ita ut uniuſcujuſque trianguli latus verſus Cycloidis verticem ſit ſemper recta contingens Cycloidem, aliud vero latus ſit parallelum contingenti proxime ſequenti, baſis vero omnium ſit in eadem recta TV; ut in triangulo DEF latus DF contingit Cycloidem in D, & DE parallelum eſt contingenti proxime ſequenti PT. Et multiplicando in infinitum numerum triangulorum ſpatium relictum decreſcet in infinitum ut patet & tandem minus erit ſpatio X. Sed unumquodque horum triangulorum habet æquale triangulum in ſegmento Circuli inſcriptum propter parelle-

BIBLIOTHEQUE ROYALE

las, ut triangulum V *f e* æquale & ſimile eſt triangulo D F E; triangulum V *i h* æquale & ſimile triangulo G I H & ſic de cæteris; quamobrem in abſurditatem incidimus. Idem fiet ſi ſupponatur ſegmentum circuli majus trilineo. unde merito concludimus Trilineum mixtum P T V eſſe æquale Circuli ſegmento correſpondenti C V.

Propositio IIª

Fig. 2. Si ſegmentum circuli CGA contingat rectam BA in extremo puncto A, portio peripheriæ CFGA voluendo ſuper rectam AB punctum C deſcribet portionem Cycloidis CEDB : dico trilineum BDCGA duplum eſſe ſegmenti circuli genitoris C G A.

Perfecto circulo C A M & ductâ M N parallela B A & contingente circulum in M, manifeſtum eſt rectam M A conjungentem tactus tranſire per centrum O. Jam ſi circulus voluatur ſuper rectam M N punctum C deſcribet portionem Cycloidis C I L, ita ut trilineum CGALI ſit duplum ſegmenti circuli CGAC; nam trilineum illud bifariam dividitur à recta C A contingente Cycloidem C I L in puncto C per primam propoſitionem. Sed ex generatione Cycloidis C D B rectæ omnes ut D G parallelæ baſi B A ſunt æquales portionibus peripheriæ circuli inter parallelas & punctum C ut G C. Similiter ex generatione Cycloidis C I L rectæ omnes ut G I parallelæ B A L vel baſi M N ſunt æquales portionibus peripheriæ circuli inter punctum C & parallelas comprehenſis ut C G : & ex hoc manifeſtum eſt rectas omnes ut D I, E H ductas ad utraſque Cycloides & parellelas B A baſi diviſas eſſe bifariam à peripheria circuli C G A; erunt igitur trilinea C D B A G, C G A L I æqualia & ideo trilineum C D B A G duplum ſegmenti circuli C G A quod erat propoſitum.

Ex inventis nulla erit difficultas in demonſtratione conficienda more antiquorum.

Propositio IIIª

Fig. 3. Eſto ſemicyclois V E B cujus baſis B A, Axis V A & circulus genitor V D A cujus centrum C. ducta C E parellela baſi A B: dico trilineum V H E D I eſſe æquale quadrato Radij V C circuli genitoris.

Ducta recta D V & ejus parallela E F contingente Cycloidem in E: per deſcriptionem Cycloidis manifeſtum eſt parallelogrammum V D E F eſſe æquale dimidio circuli genitoris : Sed per primam propoſitionem Trilineum E F V H æquale eſt ſegmento circuli D V I, ſi auferamus igitur æqualia ab æqualibus ſcilicet à parellelogrammo V D E F & à ſemicirculo V D A bis ſegmentum Circuli V D I, remanebunt trilineum V H E D I & triangulum V D A æqualia, quod erat propoſitum.

Corollarium.

Manifestum est aliud Trilineum E D L contentum recta D E, quadrante peripheriæ circuli E L & parte Cycloidis L D esse quoque æquale quadrato radij circuli genitoris, cum per secundam propos. pateat trilineum illud esse æquale trilineo V H E D I.

Propositio IVª

Esto semicyclois V E B cujus basis B A, Axis V A, & circulus genitor V G A. Sumtâ quartâ parte Axis V S, & per punctum S ductâ rectâ S E parellelâ basi B A: dico Trilineum mixtum V H E G S contentum rectis V S, S E & Cycloide V H E, esse æquale quartæ parti hexagoni inscripti circulo genitori. *Fig. 4.*

Hanc proprietatem Clarissimus vir Christianus Hugenius in libro de motu pendulorum se absolute inveniisse indicat, sed de ea demonstratio quam dedit cum in manus meas non inciderit, sequentem hîc adjungam quæ quidem persimilis est præcedenti.

Erit V G sexta pars peripheriæ circuli genitoris, & ducta recta V G & ei parallela E F, recta E F continget Cycloidem in puncto E: Sed manifestum est parallelogr. V G E F esse æquale sextæ parti circuli genitoris, sectoris scilicet C G D R cum recta E G sit æqualis peripheriæ G V, & altitudo parallelogrammi V S sit dimidia Radij. Sed Trilineum E F V H æquale est segmento circuli V G I vel G R D, quod est segmentum factum à latere hexagoni, quo trilineo E F V H ablato à parallelogrammo E F V G remanebit trilineum E H V G æquale triangulo æquilatero C R G vel ei æquali parallelogrammo C O G S, addito communi triangulo G S V fit trilineum mixtum E H V S G æquale quadrilineo V G O C, sed V G O C æquale est quartæ parti hexagoni inscripti circulo genitori, quod erat propositum.

Propositio Vª

Si in plano Cycloidis extendatur superficies V C P quæ sit dimidia pars superficiei Cylindricæ rectæ Ungularis, cujus Ungulæ altitudo C V sit æqualis Radio C V circuli genitoris Cycloidis; circulus vero basis Cylindri sit æqualis circulo genitori V D A, & basis C P æqualis est quadranti peripheriæ circuli: dico superficiem Cylindricam V C P semi-Ungulæ esse æqualem quadrato Radij V C. *Fig. 5.*

Ducantur quotlibet rectæ lineæ ut M S parellelæ basi Cycloidis B A, occurrentes Cycloidi & lineæ V S P Ungulæ extensæ: dico partem M N æqualem esse parti O S. per generationem Cycloidis recta M N æqualis est arcui circuli N V, sed recta O S æqualis est eidem arcui N V in

Ungula ut patet, quamobrem trilineum EMVND quod in tertia propositione æquale quadrato Radij demonstratum est, æquale erit superficiei semi-Ungulæ VOCPS quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc sequitur totam superficiem Ungularem, hic expositam æqualem esse rectangulo sub diametro VA circuli basis Cylindri, & altitudine VC quod duplum est præcedentis quadrati.

Sed facile demonstratur omnes superficies Cylindricas Ungulares esse inter se in ratione composita diametrorum basium Cylindrorum à quibus exsecantur, & Altitudinum. Unde merito concludimus omnem superficiem Cylindricam Ungulæ cujusvis esse æqualem rectangulo sub diametro circuli basis Cylindri & sub altitudine Ungulæ.

DE SECTIONIBUS CONICIS.

Hæc duo inventa Theoremata hîc subjungere non injucundum mihi visum est, quæ si solita demonstrarentur via, longa propositionum serie indigerent, mea vero dum explicantur methodo à multis liberantur, ut in sequentibus habes.

Theorema Ium

Fig. 6. 7. 8. 9. SI per focum D sectionis Conicæ vel sectionum oppositarum agatur recta linea LP terminata ex utraque parte in sectione conica vel sectionibus oppositis, & per puncta L & P ducantur contingentes LE, PE sibi invicem occurrentes in puncto E : dico rectam ED ductam ab occursu contingentium E ad focum D perpendicularem esse rectæ LDP primo ductæ.

Sit Axis CDA, & ducantur CG, AF perpendiculares ad Axem in verticibus A & C, sed in A tantum pro Parabola, & à puncto F in quo recta LP occurrit AF; ducatur FIGN contingens sectionem in I, connectatur AI quæ transibit per punctum E per quintam partem primæ propos. Methodi meæ sectionum Conicarum, & secabitur in punctis E, I, M, A tribus partibus harmonicè per tertiam partem primæ prop. ejusdem Meth.

Fig. 6. Sed pro Parabola, contingens IN bifariam dividitur in puncto F per tertiam partem ejusdem prop. cum sit AN diameter & AF contingens. Angulus autem IFD est rectus per 19am prop. ejusdem libri, & per lemma 6tum rectæ DA, DM, DI, DE à puncto D per puncta divisionis rectæ EI ductæ, secabunt rectam IN tribus parti-

bus harmonicè, vel bifariam in punctis N, F, I si extrema earum DE parallela sit NI, in quibus punctis bifariam divisam superius ostendi, quamobrem recta ED erit parellela rectæ NI, & idcirco perpendicularis LF, quod erat propositum.

Et pro cæteris sectionibus, recta FN dividitur in punctis N, G, I, F tribus partibus harmonicè per 6^am partem primæ prop. Meth. eo quod tres rectæ FI, CG, AF contingant sectionem, & ACN conjungat tactus, unde NF ad FI, ut NG ad GI: & per Lemma sextum rectæ lineæ DA, DM, DI, DE à puncto D per puncta A, M, I, E divisionis rectæ AE divident rectam FN tribus partibus harmonicè in eisdem punctis F, I, G, N in quibus divisam esse supra demonstravi; nam recta DE transit per punctum G quod sic probo. Transeat si fieri possit recta DE per punctum *g* diversum à G, recta ergo FN dividetur etiam in punctis F, I, *g*, N tribus partibus harmonicè unde NF ad FI ut N*g* ad *g*I, ergo N*g* ad *g*I, ut NG ad GI quod absurdum, transibit igitur recta DE per punctum G. Sed per 22^am prop. meæ Meth. propter contingentem FG angulus FDG est rectus, quod erat propositum. *Fig.* 7. 8. 9.

Scholium.

Si recta PL juncta fuerit Axi, contingentes in P & L erunt inter se parallelæ, & recta DE parallela his contingentibus erit perpendicularis Axi & rectæ PL quod manifestum est.

Sed si PL sit perpendicularis Axi, contingentes PE, LE occurrent sibi invicem in Axe AC, unde patet propositum.

Tandem si contingens FIG sit parellela Axi, tunc bifariam dividitur in punctis F, I, G, & quod in demonstratione dictum est de tribus partibus harmonicè idem erit de duabus æqualibus, quod nullam mutationem demonstrationi afferet, ut patet ex Lemmate sexto.

Theorema II^um

Si duæ rectæ lineæ AI, AB contingentes sectionem Coni vel sectiones oppositas, sibi invicem occurrant in puncto A, à punctis contactuum B & I, & occursus A ductis tribus rectis BD, ID, AD ad focum D: dico angulos ad focum contentos sub tribus rectis BD, ID, AD inter se esse æquales. *Fig.* 10. 11. 12. 13.

Producta AD donec occurrat sectioni duobus in punctis, vel sectionibus oppositis in P & L, & per puncta P & L ductis contingentibus LE, PE, quæ primo sibi occurrant in E: recta BI contingens tactus rectarum AB, AI transibit per punctum E per quintam partem primæ prop. Meth. meæ, & dividitur in punctis E, I, C, B tribus partibus harmon. Jam per punctum B ducatur FBG parellela DI; dico

BG & BF esse æquales, triangula enim EID, EBG sunt similia, ergo BE ad IE, ut BG ad ID; sed BE ad IE, ut BC ad CI, cum sit BE divisa in punctis B, C, I, E tribus partibus harm. Rursus propter similia triangula IDC, BFC, erit BC ad CI, ut BF ad DI, ergo BG ad ID ut BF ad DI: quamobrem BG & BF erunt æquales. Per præcedentem propositionum rectus est angulus FDG, erit ergo punctum B centrum circuli transeuntis per puncta G, D, F, & ideo BD & BG erunt æquales, & triangulum GBD est Isosceles, & anguli BDG, BGD sunt æquales, & propter parallelas BG, ID, angulus BGD æqualis est angulo IDE; angulus ergo IDE æqualis est angulo BDG. Sed anguli ADE, ADG sunt æquales cum sint recti, & si auferantur ab his æquales IDE, BDG, remanebunt IDA, BDA æquales; & in sectionibus oppositis IDA, BDC; quod erat propositum.

2° Si rectæ PE, LE sint parallelæ, recta BI erit etiam parellela his parallelis per eandem quintam partem primæ prop. Meth. meæ, & reliqua ut supra demonstrabuntur.

Universalem habeo generationem focorum sectionum Conicarum in Cono, quæ nova & unica methodo principiis meis deducta horum punctorum proprietates facillime resolvit, sed eam hîc adnotasse sufficiet. Si per punctum basis Coni exponens centrum sectionis ducatur recta linea parallela rectæ, quæ est sectio plani per verticem Coni, paralleli plano secanti, & plani exponentis Axem sectionis, quæ recta erit in plano exponenti Axem, & terminata in superficie conica: Si assumatur huic rectæ vel ductæ in ratione data, æqualis in rectâ exponente alterum Axem, cujus rectæ extremitas sit in puncto exponente centrum, ab altera autem extremitate ductis contingentibus ad circulum basem Coni, & à punctis contactuum ductis quoque rectis exponentibus ordinatas ad Axem primò assumtum; puncta occursus ordinatarum exponent focos. Sed si punctum à quo ducendæ sunt contingentes cadit in circulo basi coni, non erit assumta exponens Axis majoris, sed minoris, & tunc transferenda erit operatio in alteram exponentem Axium, sed hoc tantum contingit Ellipsi, ut patet intelligenti meam Methodum sectionum Conicarum, & quæ dicta sunt non minus valent in Parabola cui non est centrum, sed punctum in peripheria circuli quod est occursus plani per verticem, centri officio fungitur & hic tres covincidunt rectæ; sed hujus methodi explanatio fusius & commodius alio tempore in lucem prodibit.

Datum Parisiis 15. die Sept. 1676.

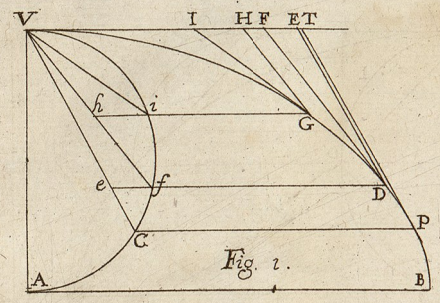

Fig. 1.

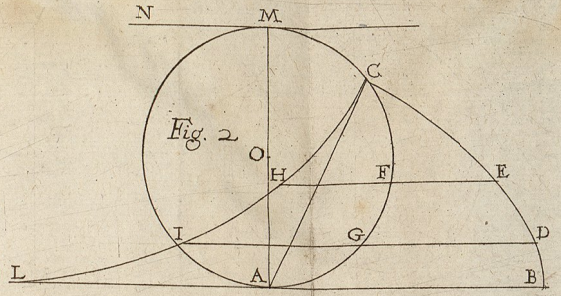

Fig. 2

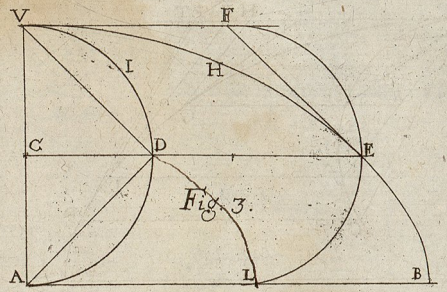

Fig. 3.

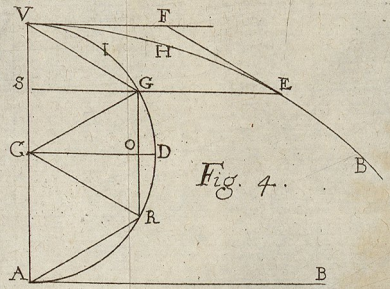

Fig. 4.

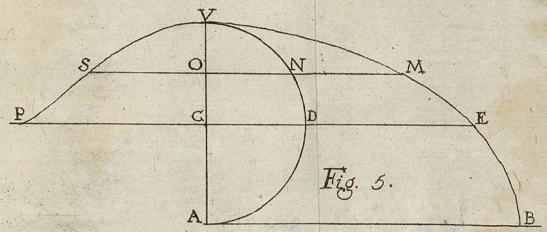

Fig. 5.

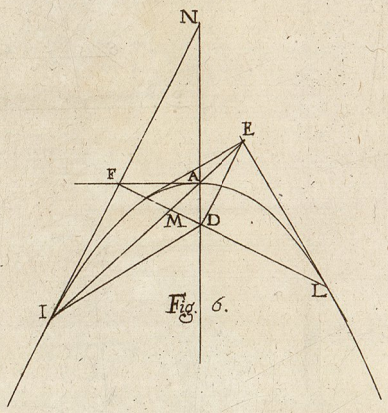

Fig. 6.

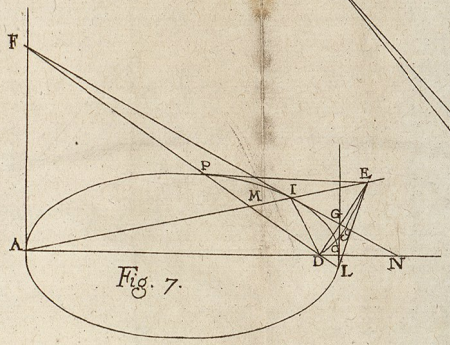

Fig. 7.

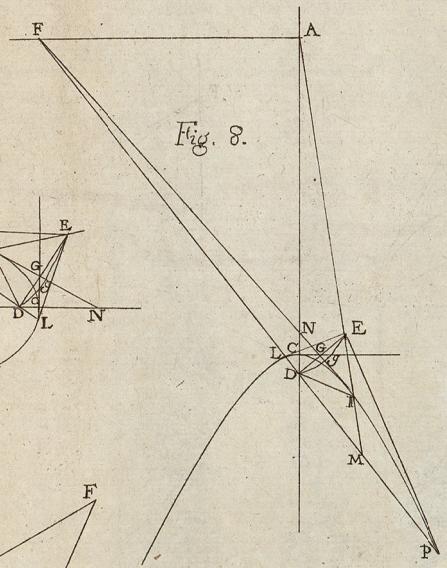

Fig. 8.

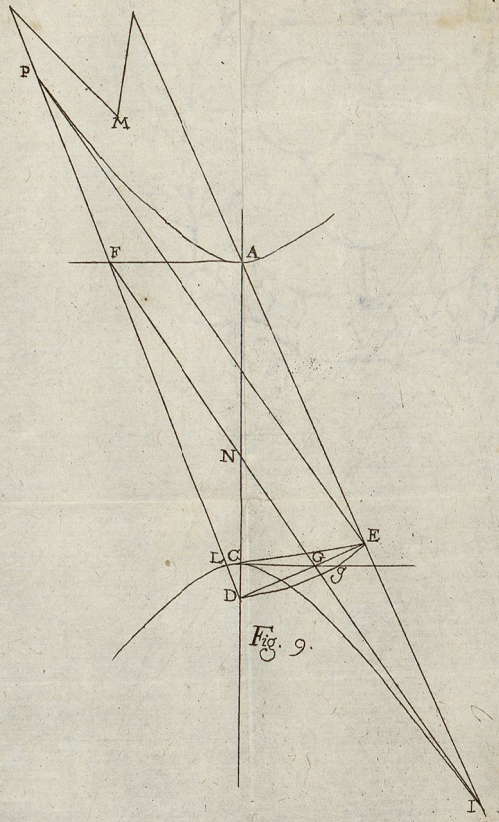

Fig. 9.

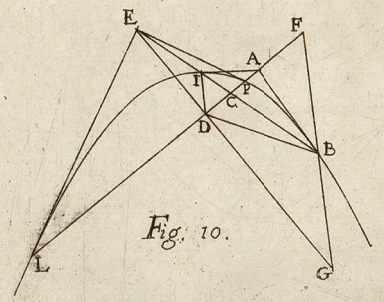

Fig. 10.

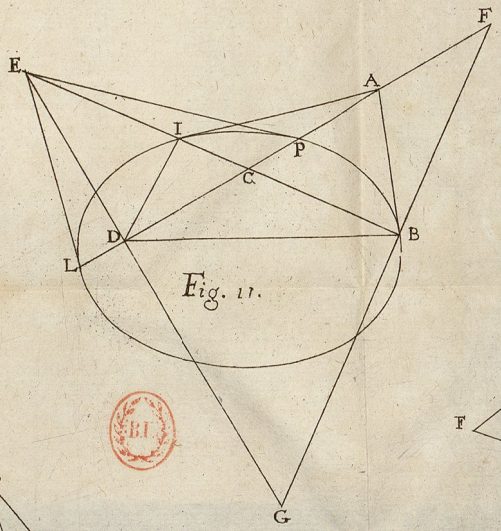

Fig. 11.

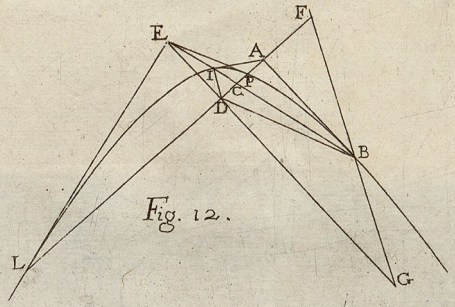

Fig. 12.

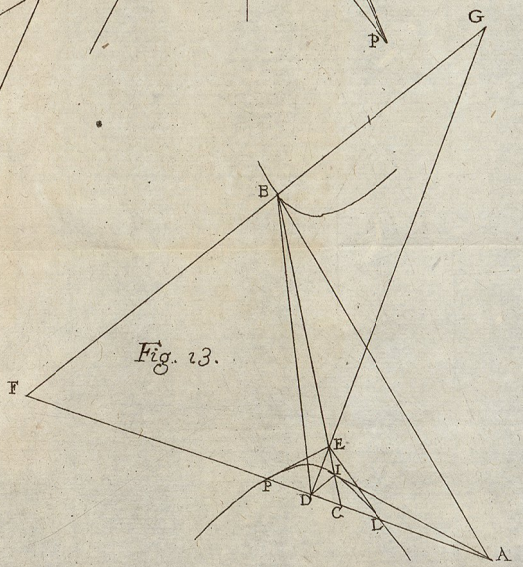

Fig. 13.